



Надлъжно сравнение на познанията за стойността на цифрите в зависимост от позицията им и аритметиката при ученици, които учат и такива, които не учат по метода „Монтесори“

Елида В. Ласки, Марина Василева и Йоана Шифман
Колежът в Бостън

Ключови думи: аритметика, основа 10, стойност на цифрите в зависимост от позицията им, Монтесори, математика в ранно детство

Резюме. Основа 10 и стойността на цифрите в зависимост от позицията им (единица, десетица, стотна ...) са важни основни математически понятия, които са свързани с по-широка употреба на стратегии за декомпозиция и по-висока степен на точност в задачите със събиране (Ласки, Ермакова и Василева, 2014 г.; Фюзон, 1990 г.; Фюзон и Браярс, 1990 г.; Национален съвет за научни изследвания, 2001 г.). Настоящото изследване изследва познанията за основа 10, стойността на цифрите в зависимост от позицията им, и аритметичната точност и употребата на стратегии в първите класове от началното училище сред децата, които учат и тези, които не учат по метода „Монтесори“. Първоначално изпитахме децата ($N = 150$) или в детската градина, или в първи клас. Две години по-късно, ние отново проведохме изпит на подгрупа на същата извадка ($n = 53$), когато децата бяха във втори и трети клас. Въпреки че учебната програма „Монтесори“ поставя голям акцент върху структурата на числото на основа 10, ние установихме, че децата от училищата „Монтесори“ демонстрират предимство в правилното използване на каноничното изображение на основа 10 в детската градина, но не и в първи клас. Освен това, не бяха установени никакви разлики в програмата във втори и трети клас по отношение на разбирането на стойността на цифрите в зависимост от позицията им. Въпреки че децата от „Монтесори“ използваха различни стратегии, за да получат отговор на задачи със събиране във втори и трети клас, в сравнение с децата, които не учат по „Монтесори“, не бяха установени никакви различия в програмата в никой от класовете по отношение на точността при събиране. По-долу са обсъдени последиците от обучението.

Посредствените резултати по математика са постоянен проблем в образователната система на САЩ. При сравнения на познанията по математика на международно ниво, резултатите на американските ученици вечно изостават в сравнение с тези на техните връстници от Източна Азия и голяма част от Европа (Гонзалес и сътр., 2009 г.). Резултатите от националните оценявания в рамките на САЩ не са по-обнадеждаващи; при последното национално оценяване на напредъка в образованието, 26% от американските осмокласници са се представили на ниво, класифицирано като *под основното* (Национален център за образователни статистики, 2013 г.). Тези неадекватни нива на резултатите по математика влияят отрицателно както на националната икономика, така и на индивидуалните възможности за влизане в колеж, изграждане на кариера, както и на икономическите възможности (Национален консултативен панел по математика, 2008 г.).

От съществено значение е да помогнем на децата да придобият основни познания за числата в ранна детска възраст, с цел подобряване на резултатите по математика в Съединените

щати. Математическите познания от ранна възраст прогнозираят темп на растеж в математиката (Аунола, Лескинен, Лерканен и Нурми, 2004 г.), както и по-добри резултати на тестовете по математика чак в гимназията (Дънкан и сътр., 2007 г.; Джордан, Каплан, Раминени и Локуниак, 2009 г.; Стивънсън и Нюман, 1986 г.). По-конкретно, познанията за стойността на цифрите в зависимост от позицията им и аритметиката са фундаментални за по-нататъшното обучение по математика (Килпатрик, 2001 г.; Микс, Пратер, Смит и Стоктън, 2014 г.). Настоящото изследване изследва дали подходът „Монтесори” насърчава по-добро разбиране от подходите в други държавни училища по три фундаментални аспекта за по-нататъшното обучение по математика: (а) разбиране на основа 10 и стойност на цифрите в зависимост от позицията им, (б) способност за точно решаване на аритметични задачи, и (в) използване на основа 10 за декомпозиция, една ефективна аритметична стратегия.

Литературен преглед

Разбиране на основа 10 и стойността на цифрите в зависимост от позицията им

Множество проучвания са установили, че стойността на цифрите в зависимост от позицията им е трудно понятие за малките деца (Карпентър, Франки, Джейкъбс, Фенема, и Емпсън, 1998 г.; Коули, 1988 г.; Коб и Уетли, 1988 г.; Фюзон, 1986 г., 1988 г., 1992 г.; Фюзон и Браярс, 1990 г.; Гинсбърг, 1989 г.; Камий, 1986 г.; Миура и Окамото, 1989 г.; Резник и Омансон, 1987 г.; Рос, 1989 г., 1990; Варелас и Бекер, 1997 г.). На децата са им нужни няколко години, за да започнат да разбират системата на основа 10 и бройната система на цифрите в зависимост от позицията им. Децата в предучилищна възраст могат да преценяват относителната величина на многоцифрените числа и да записват голям брой думи с писмени знаци. Въпреки това, преди официалното образование, повечето деца смятат числата по-големи от десет за сбор от едноцифрени числа, а не за групи от десетици и единици (Микс и сътр., 2014 г.). Детското разбиране на структурата на числата на базата на основа 10 обикновено се оценява с блок задача (например, Миура, Окамото, Ким, Стиър и Файол, 1993 г.), в която децата трябва да изобразят двуцифрени числа, като използват комбинация от единични кубчета и десетични разделители. Между детската градина и втори клас, децата все по-често използват както десетици, така и единици, при изобразяването на двуцифрени числа (Миура и сътр., 1993 г.; Сакстън и Тауси, 1998 г.). Възприемането на многоцифрените числа за групи от десетици и единици по-късно преминава в познание на стойността на цифрите в зависимост от позицията им, което е от решаващо значение за решаването на по-сложни аритметични задачи (например $27 + 14$). Варелас и Бекер (1997 г.) установяват, че процентът на децата, които смятат правилно и едновременно с това правилно идентифицират цифри на десетично място в писмени аритметични задачи, се е увеличил от 56% на 77% достигайки до 98% в периода между втори и четвърти клас. Разбирането на структурата на основа 10 предполага по-задълбочено разбиране на това как числата се отнасят едно към друго и как числата могат да се увеличават с интервали по-големи от единица, като например десетки и стотици. И двете умения са полезни при боравенето с числа. Децата в детската градина, например, които изобразяват двуцифрените числа като сбор от десетици и единици, а не като отделни единици, са по-склонни да използват сложни стратегии за събиране, като например декомпозиция, което от своя страна е свързано с по-голяма точност в аритметиката (Ласки и сътр., 2014 г.). На по-късен етап в основното образование, познанията за основа 10 са свързани с точност при решаването на аритметични задачи с многоцифрени числа (Фюзон, 1990 г.; Фюзон и Браярс, 1990 г.; Национален съвет за научни изследвания, 2001 г.).

Възрастта, на която децата правилно използват десетични блокове и единични блокове, за да изобразят двуцифрени числа изглежда зависи, отчасти, от техния учебен опит (Фюзон и Браярс, 1990 г.; Фюзон, Смит, и Ло Цицерон, 1997 г.; Хеберт и Уиърни, 1992 г.; Миура и сътр., 1993 г.; Варелас и Бекер, 1997 г.). Например, Сакстън и Тауси (1998 г.) установяват, че практически опити, при които експериментаторът демонстрира как се използват десетичните блокове и единичните блокове, за да се изобразят двуцифрени числа, имат значителен положителен ефект върху степента,

в която малките деца използват както десетичните, така и единичните блокове, за да образуват двуцифрени числа. Освен това, скорошно проучване установи, че няма разлика в използването на изображения на основа 10 при децата в детската градина от Източна Азия и тези от Америка при по-малко от една година официално обучение (Василева и сътр., 2015 г.), въпреки че такива разлики са документирани в края на първи клас, след повече от една година официално обучение (например, Миура и сътр., 1993 г.). Учебната програма по математика в „Монтесори“ отдава голямо значение на основа 10 и стойността на цифрите в зависимост от позицията им с помощта на поредица от материали (например, златни мъниста, игра с печати, сметало с топчета), които наблягат на тези понятия, дори при деца на 3 години (Ласки, Джордан, Дауст, и Мъри, 2015 г.; Лилард, 2005 г.; Монтесори и Симъндс, 1917 г.). По този начин, изглежда правдоподобно, че може да съществуват разлики в разбирането на основа 10 и стойността на цифрите в зависимост от позицията им в ранна детска възраст въз основа на това дали или не децата са преминали през обучение по математика по „Монтесори“ на възраст между 3 и 6 години.

Аритметична точност и стратегия за декомпозиция

За да се справят успешно с по-сложни за решаване математически задачи, децата трябва първо да се научат точно и ефективно да решават прости аритметични задачи в първите класове на началното училище (Коуан и съдр., 2011 г.; Джордан, Каплан, Ола, и Локуниак, 2006 г.). Децата могат да решават задачи със събиране чрез различни стратегии, всяка от които включва някои необходими умения. Когато ги накарат да решават задачи без молив и хартия, децата обикновено използват една от трите вида стратегии за събиране: (а) броене, (б) възстановяване, и (в) декомпозиция (Гийри, Боу-Томас, Лиу, Сиглър, 1996 г.; Гийри, Фен, и Боу-Томас, 1992 г.; Шрагер и Сиглър, 1998 г.). Броенето включва изброяване на двете събираеми или броене от стойността на едното от събираемите нагоре. Възстановяването включва припомняне на решението на задачата, като число, което се е съхранило в паметта, а не активно изчисление. Декомпозицията включва трансформиране на първоначалната задача в две или повече прости задачи, което често включва първо решаване на десетиците (например, декомпозицията на основа 10: решаване $6 + 5$ чрез добавяне на 6 и 4, за да се получи 10 и след това добавяне на още 1).

Стратегията за декомпозиция на основа 10 е една от най-ефективните стратегии за точно решаване на аритметични задачи наум, особено когато задачите са свързани с двуцифрени числа (Ашкрафт и Стазик, 1981 г.; Горбейнс, Вершафел и Гескю, 2004 г.). Децата, които използват тази стратегия обикновено разбират по-добре структурата на числата, базирана на основа 10, отколкото тези, които не я използват (Ласки и сътр., 2014 г.). В действителност, децата и възрастните, които често използват декомпозиция за решаване на аритметични задачи обикновено имат по-добри резултати по математика и като цяло по-високи оценки, отколкото тези, които разчитат на стратегиите с броене (Кар и Алексеев, 2011 г.; Кар, Щайнер, Кайзер и Бидълком, 2008 г.; Гийри, Хорд, Бърд-Крейвън, и ДеСото, 2004 г.; Фенема, Карпентър, Джейкъбс, Франки, и Леви, 1998 г.). По този начин, изследвайки честотата, с която децата използват декомпозицията за решаване на аритметични задачи, придобиваме представа за цялостните им познания по математика.

Хипотеза на изследването и изследователски въпроси

Настоящото изследване се основава на хипотезата, че подходът „Монтесори“ може да помогне на децата да разберат основа 10 и стойността на цифрите в зависимост от позицията им, както и да придобият по-голяма аритметична точност, и да използват стратегията за декомпозиция на основа 10 в по-голяма степен, отколкото други традиционни програми, различни от „Монтесори“. Тази хипотеза се основава на степента, в която математическите материали на „Монтесори“ подчертават структурата на числата, на базата на основа 10 и на това, че децата имат възможност да използват тези материали в програмата за предучилищно образование (на възраст от 3 до 5 години).

Изследванията показват, че конкретни материали могат да подпомогнат ученето на малките деца по математика, но не всички материали са еднакво ефективни (например, Ласки и Сиглър, 2014 г.; Сиглър и Рамани, 2009 г.; Утал, О’Дохърти, Нюланд, Хенд, и ДеЛоаче, 2009 г.). Наскоро

публикуван литературен преглед идентифицира четири принципа, които правят по-вероятно конкретни материали да бъдат ефективни за целите на обучението: (а) последователно прилагане на предмети, (б) въвеждане на конкретни изображения на понятията, преди постепенно прогресиране към по-абстрактни изображения, (в) избягване на предмети, които представляват предмети от бита, и (г) ясно обяснение на връзката между предмета и понятието, което той изобразява (Ласки и сътр., 2015 г.). Освен това, тази статия предполага, че материалите Монтесори, които се използват за преподаване на числата и структурата на основа 10, следват тези принципи. Например, учебната програма Монтесори използва малък набор от материали (например, златни мъниста) последователно в продължение на няколко години обучение, като се започне с конкретни изображения на десетични разделители и единични мъниста, и се пристъпи към по-абстрактни изображения, използвайки плочки с цифри. Материалите, които се използват в обучението на Монтесори по математика също имат ясна и последователна система за изобразяване на стойността на числата в зависимост от позицията им чрез цветово кодиране (Ласки и сътр., 2015 г.; Лилард, 2005 г.).

В допълнение към качеството на материалите, които се използват в преподаването на математика по метода Монтесори, наблюдаването върху събирането също така предполага, че то подпомага едно по-добро разбиране на основа 10 и аритметиката в ранна детска възраст в сравнение с други програми. Доказателствата сочат, че правилното преподаване на това как да се използват стратегиите за декомпозиция, базирани на основа 10 в аритметиката е от решаващо значение за научаване как точно се прилага тази стратегия и за подобряване на разбирането на основа 10 (Фюзон и Ли, 2009 г.; Пери, 2000 г.). Уроците по математика по метода Монтесори наблягат на смятането на единици и десетици като предпочитан подход за аритметиката с многоцифрени числа, като се започне с първия опит на децата в решаването на тези видове задачи (Монтесори и Симъндс, 1917 г.). За разлика от горното, анализ на уроците, включени в типичните програми, различни от Монтесори (например, математика по системата TERC (*превод: Система от идентификатори и имена на единици от административното деление*)) установява по-малко внимание върху този подход, отколкото в програмата по математика на Монтесори, особено в детската градина.

Въз основа на нашата хипотеза, че подходът Монтесори може да помогне на децата да разберат основа 10 и стойността на цифрите в зависимост от позицията им, както и да развият по-голяма аритметична точност, и да използват стратегията за декомпозиция, базирана на основа 10 в по-голяма степен, отколкото други традиционни програми, различни от Монтесори, ние тествахме три конкретни изследователски въпроса.

Първо, в ранна детска възраст (детската градина и първи клас), учениците от училища „Монтесори” и тези от другите училища показват ли различия в (а) използването на основа 10 за изобразяване на число, (б) точното решение на аритметични задачи, (в) избора на стратегия при решаване на аритметични задачи, и (г) точното изпълнение на стратегиите за декомпозиция?

Второ, има ли/появяват ли се по-късно разлики в подхода Монтесори и този на другите училища към математиката по отношение на решаването на по-сложни задачи? По-конкретно, учениците от основни училища „Монтесори” и останалите основни училища показват ли различия в разбирането на стойността на цифрите в зависимост от позицията им, в точното решаване на аритметични задачи, и в избора на стратегия при решаване на аритметични задачи?

Трето, различията в ранна възраст в разбирането на основа 10 предполагат ли разлики на по-късен етап в точността при аритметичните задачи и изобразяването на стойността на цифрите в зависимост от позицията им?

Нашата прогноза е, че, особено в края на тригодишния цикъл (детската градина и трети клас), децата от училищата „Монтесори” биха се представили по-добре от връстниците си при задачи, изискващи концептуално разбиране на основа 10 и стойността на цифрите в зависимост от позицията им. Освен това, ние също така прогнозираме, че деца с по-добри познания за основа 10 също биха били по-склонни да използват стратегии за декомпозиция при решаване на задачи със събиране.

Метод

Участници

В изследването е включена голяма група от деца от детската градина и първи клас ($N = 150$) от училища „Монтесори” и други училища в североизточен град. Както е показано в Таблица 1, 77 деца от детската градина (Монтесори: $n = 48$; други: $n = 29$. $M_{\text{възраст}} = 6$ години, 2 месеца) и 73 деца от първи клас (Монтесори: $n = 56$; други: $n = 17$. $M_{\text{възраст}} = 7$ години, 2 месеца) са включени в Период 1 (T1). Приблизително 30% от тези деца са били изпитани отново две години по-късно по време на Период 2 (T2). Две групи деца са участвали и в T1, и в T2. Едната група (Монтесори: $n = 15$; други: $n = 8$) е била оценена по време на T1 като ученици от детската градина ($M_{\text{възраст}} = 6$ години, 2 месеца) и отново по време на T2 като ученици от втори клас ($M_{\text{възраст}} = 8$ години, 5 месеца). Втората група (Монтесори: $n = 17$; други: $n = 13$) е била оценена по време на T1 като ученици от първи клас ($M_{\text{възраст}} = 7$ години, 1 месец) и отново по време на T2 като ученици от трети клас ($M_{\text{възраст}} = 9$ години, 4 месеца). Не са наблюдавани съществени различия по отношение на възрастта на децата в двете програми в никой клас.

Таблица 1

Описание на участниците, включени в Период 1 (T1) и Период 2 (T2)

	T1		T2	
	Детска градина	Първи клас	Втори клас	Трети клас
Монтесори n	48	56	15	17
Други n	29	17	8	13
Средна възраст (месеци)	74	86	101	112

Процедура

Период 1. По време на Период 1 (T1), когато децата са в детската градина или в първи клас, са приложени две задачи в рамките на две сесии: блок задача с основа 10 и задача със събиране.

В блок задачата с основа 10, експериментаторът представя на децата блокове единици и блокове десетици и обяснява, че блоковете могат да се използват, за да изобразяват числа. Експериментаторът взима 10 блока единици от таблата и ги нарежда срещу десетичния блок, като през това време брой от 1 до 10, за да покаже, че един дълъг блок е равен на 10 малки блокчета. След като се запознаят със задачата с два практически опита, всяко дете има право на пет опита. При всеки опит, експериментаторът показва на детето карта с различно число и казва на детето да представи числото като използва блокове. Петте опита включват случайно изобразяване пред детето на числата 12, 16, 28, 34, и 61. Експериментаторът записва колко блока единици и колко блока десетици е използвало детето за изобразяване на всяко число и прави бележки за представянето на детето. За всеки опит, експериментаторът записва дали детето (а) е използвало само блокове единици, (б) е използвало канонично представяне на основа 10, което включва използването на възможно най-голям брой от десетичните блокове за изобразяване на десетици и единични блокове за изобразяване на единици (например, изобразяване на 23 с два десетични блока и три единични блока), (в) е използвало не-канонично представяне на основа 10, което включва няколко блока на основа 10, но не максималния брой, както и блокове единици (например,

изобразяване на 23 с един десетичен блок и тринадесет блока единици), или (г) нито едно от горните.

В задачата със събиране, на децата е дадена поредица от отделни задачи със събиране, като всяка задача е отпечатана върху отделен лист. Експериментаторът прочита всяка задача на глас и след това дава на децата необходимото време, за да решат задачата. Децата не са разполагали с никакви консумативи, като например хартия или молив, но им е било позволено да използват пръстите си или да броят на глас. Експериментаторът наблюдавал детето и записвал всички явни признаци на употреба на стратегия (например, ако детето брои на глас, изпитващият отбелязвал използване на стратегия за броене). Когато не е имало явни поведения, изпитващият питал участника, как той или тя е решил/а задачата след като вече отговорът е даден. Всяка задача се оценява за точност. Освен това, експериментаторът кодира стратегиите, които децата са използвали, в следните пет категории: броене на всичко, броене от стойността на първото число нагоре, декомпозиция, възстановяване, и други. Стратегията за броене на всичко се използва, когато едно дете брои всяко събираемо и след това брои общия сбор (например, за да реши $5 + 3$, детето първо брои до 5, а след това брои до 3, и след това най-накрая брои от 1 до 8). Стратегията за броене от стойността на първото число нагоре се използва, когато едно дете брои нагоре, започвайки от стойността на едното събираемо и прибавя стойността на второто събираемо (например, за да реши $5 + 3$, детето брои от 6 до 8). Декомпозицията се използва, когато детето трансформира първоначалната задача в две или повече прости задачи, с използване или на предварително запомнен отговор, или на свойствата на системата от числа, на базата на основа 10 (например, за да реши $7 + 6$, детето може първо да събере $7 + 3$, за да получи 10 и след това да добави още 3, за да получи 13). Възстановяването се използва, когато детето си припомни решението по памет. Ако дадено дете или използва предположение, или стратегия, която не може да бъде съотнесена към някоя от предходните категории, то стратегията се кодира като друга.

Период 2. По време на Период 2 (T2), когато са във втори или трети клас, децата са решавали по петнадесет задачи: пет задачи с определяне стойността на цифрите в зависимост от позицията им (например, "Отбележете с кръгче най-голямото число: 10101, 1901, 93001, 1899") и десет аритметични задачи. В серията от аритметични задачи, са били дадени пет задачи за събиране и изваждане с двуцифрени и смесени числа в рамките на едно задание (например, "В магазин за хранителни стоки има 89 банана. Магазинът продал 27 банана в понеделник и 34 банана във вторник. Колко банани са останали в магазина за хранителни стоки в сряда?"). Останалите пет аритметични задачи са извадени от контекста, като трябвало да се решават задачи със събиране, изваждане, и неизвестни с двуцифрени числа (например, $42 - 29 =$), с използване само на числа. На децата било разрешено да решат задачите или наум, или с молив и хартия. За всяка задача, експериментаторите следвали същата процедура, използвана по време на T1 за оценяване на точността и употребата на стратегия от децата, с две разлики в процедурата. Първата разлика е, че възстановяването не се е кодирало. Задачите са използвали двуцифрени числа, а се смята, че децата са в състояние да си спомнят отговорите само на прости задачи (например, Гийри и сътр., 2004 г.). Втората разлика е използването на код, *писмен алгоритъм*, когато децата са писали или описвали писмения алгоритъм (например, "Аз подредих числата в главата си и пренесох това,").

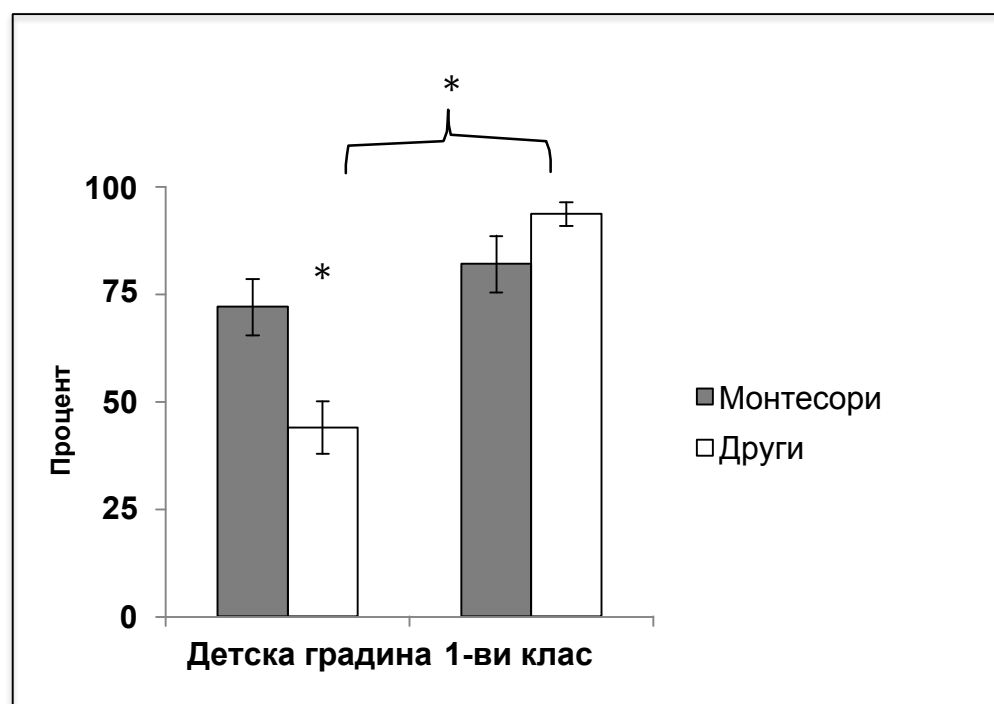
Резултати

Изследователски въпрос 1

За да отговорим на първия ни изследователски въпрос, ние проучихме дали има разлики на ниво програма или на ниво клас в точността на блок задачата на базата на основа 10 и аритметиката, както и в избора на стратегия и точността при използването на стратегия за декомпозиция. За този изследователски въпрос, ние се интересуваме от разглеждането само на данните от T1, затова използвахме цялата извадка ($N = 183$).

Познания за основа 10. Проведохме 2 (клас: детска градина срещу първи клас) \times 2 (програма: Монтесори срещу друга) анализа ANOVA (Дисперсионни анализи) за процента блок-задачи, в които децата правилно са използвали канонично представяне на основа 10. Открихме

основен ефект за клас, $F(1, 178) = 39.47, p < .001, \eta_p^2 = .18$ и взаимодействие от типа клас-програма, $F(1, 178) = 14.32, p < .001, \eta_p^2 = .07$. Фигура 1 представя средната точност на децата, разделена по категории клас и програма. Учениците от първи клас използвали точно канонично изображение на по-голям процент от опитите, отколкото учениците от детската градина, 90% ($SD = 28$) в сравнение с 56% , ($SD = 43$), съответно, $p < .001$. Този ефект варира при различните програми: първокласниците, които посещавали училища, различни от „Монтесори” били по-склонни да използват канонични изображения, отколкото децата от детската градина, $p < .001$, но вече нямало разлики на ниво клас между децата от детската градина и първокласниците, които учели по програми Монтесори. С други думи, между детската градина и първи клас, децата, учещи по програми, различни от Монтесори демонстрирали значително увеличение в използването на канонични изображения (4% [$SD = 43$] to 94% [$SD = 28$] от опитите), докато това не се забелязвало при децата, учещи по Монтесори. Това откритие може да се дължи отчасти на факта, че децата от Монтесори имат по-малко възможности за подобрение в сравнение с децата, учещи по други програми. В детската градина, децата от училищата „Монтесори” използвали правилни канонични изображения на 28% повече задачи в сравнение с децата от държавните училища. В обобщение, децата, които посещавали програми Монтесори демонстрирали предимство в разбирането на основа 10 в детската градина в сравнение с техните връстници от други училища, но децата от другите училища показали подобрение до края на първи клас, така че на този етап вече няма разлика между програмите.

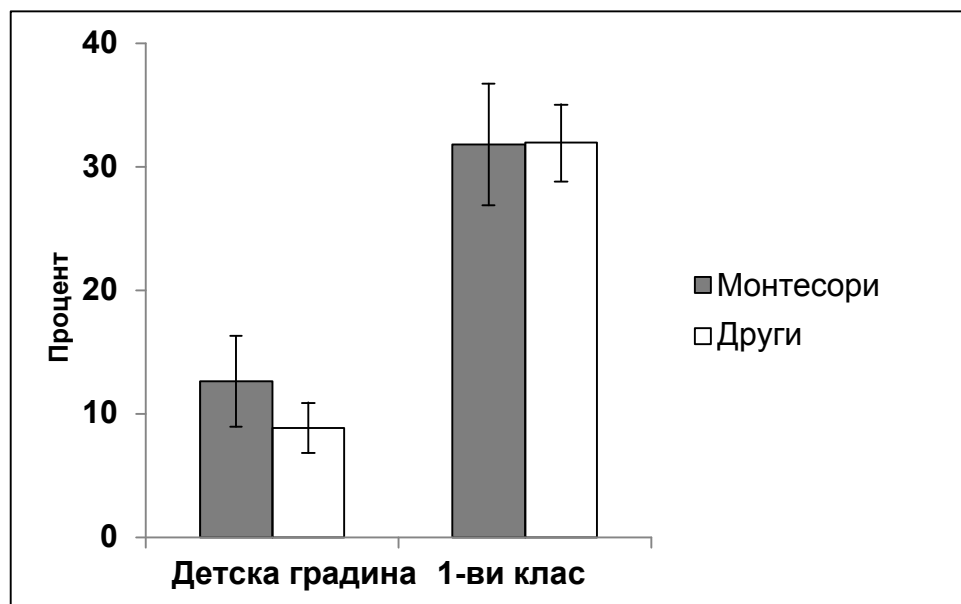


Фигура 1. Процент на правилните канонични изображения на основа 10 по време на Т1. Стълбовете,

* $p < .001$.

Аритметична точност. Анализите ANOVA 2 (клас: детска градина срещу първи клас) \times 2 (програма: Монтесори срещу друга) за процента задачи, решени правилно, са установили главен ефект за клас, $F(1,178) = 43.62$, $p < .001$, $\eta_p^2 = .20$. Първокласниците са дали правилен отговор на повече задачи със събиране, отколкото децата от детската градина, $p < .001$, 87% срещу 63%.

Аритметична стратегия. Анализите MANOVA (Многовариантни дисперсионни анализи) 2 (клас: детска градина срещу първи клас) \times 2 (програма: Монтесори срещу друга) за процента задачи, за които децата са използвали стратегия за *броене*, *декомпозиция*, *възстановяване*, или *друга*, са установили многовариантен главен ефект за клас, $F(4, 175) = 16.57$, $p < .001$, $\eta_p^2 = .27$, такъв, че разпределението на стратегиите, използвани от децата се е променило между детската градина и първи клас. За да разберем по-добре многовариантния ефект, ние разгледахме резултата от еднопроцесните анализи и установихме главните ефекти за клас за всеки тип стратегия. Децата от детската градина са използвали броене, $F(1, 178) = 25.98$, $p < .001$, $\eta_p^2 = .13$, и друга стратегия, $F(1, 178) = 6.30$, $p = .01$, $\eta_p^2 = .03$, по-често от първокласниците; броене и друга стратегия са били използвани при 65% ($SD = 31$) и 11% ($SD = 20$) от задачите със събиране от децата в детската градина, но при 39% ($SD = 31$) и 5% ($SD = 8$) процента от първокласниците. За разлика от горното, първокласниците са използвали декомпозиция, $F(1, 178) = 38.03$, $p < .001$, $\eta_p^2 = .18$, и възстановяване, $F(1, 178) = 45.59$, $p < .001$, $\eta_p^2 = .20$, по-често от децата в детската градина; декомпозицията и възстановяването са били използвани при 10% ($SD = 18$) и 9% ($SD = 11$) от задачите със събиране при децата в детската градина, но при 32% ($SD = 25$) и 23% ($SD = 14$) от първокласниците. Не е установен главен ефект за програмата или взаимодействието програма-клас. По този начин, първокласниците са били по-склонни да използват сложни стратегии в сравнение с децата от детската градина, независимо от програмата, и във всеки клас учениците от училища „Монтесори“ и тези от други училища са използвали подобни стратегии за решаване на задачите със събиране. Фигура 2 представя средния процент на опитите, при които децата от детската градина и тези от първи клас са използвали всеки тип стратегия.



Фигура 2. Процент на задачите, при които децата са използвали стратегия за декомпозиция по време на T1.

Точност на декомпозицията. Анализите ANOVA 2 (клас: детска градина срещу първи клас) \times 2 (програма: Монтесори срещу друга) за процента задачи, при които децата правилно са използвали стратегия за декомпозиция, са установили главен ефект за клас, $F(1, 175) = 36.10, p < .001, \eta_p^2 = .17$, но не са установили главен ефект за програмата или взаимодействието програма-клас. Първокласниците са използвали стратегия за декомпозиция правилно при 32% ($SD = 25$) от задачите, при които са се опитали да я използват, докато децата от детската градина са изпълнили стратегията правилно само в 11% ($SD = 19$) от задачите, при които са се опитали да я използват.

Изследователски въпрос 2

За да отговорим на нашия втори изследователски въпрос за това дали децата, които са изучавали подходите Монтесори за математиката в началното училище, демонстрират предимства на по-късен етап, ние проучихме дали има различия на ниво програма и на ниво клас в точността на задачите за определяне на стойността на числата в зависимост от позицията им и аритметичните задачи за втори и трети клас.

Познания за стойността на числата в зависимост от позицията им. Анализите ANOVA 2 (клас: детска градина срещу първи клас) \times 2 (програма: Монтесори срещу друга) за точността на задачите за определяне на стойността на числата в зависимост от позицията им, не са установили главен ефект за клас или тип задача, както и не са открили взаимодействие между клас и програма.

Аритметична точност. Предварителните анализи не показват различия в точността на децата при контекстуализирани и деконтекстуализирани задачи; така тези две категории са комбинирани, за да образуват обща аритметична мярка. Анализите 2 (клас: втори срещу трети) \times 2 (тип програма: Монтесори срещу друга) за процента аритметични задачи, решени правилно, са установили главен ефект за клас, $F(1, 49) = 5.66, p = .02, \eta_p^2 = .10$. Второкласниците са отговорили правилно на 64% ($SD = 32$) от задачите, докато третокласниците отговорили правилно на 81% ($SD = 19$) от задачите. Не е установен основен ефект за програмата и не е установено взаимодействие между програма и клас.

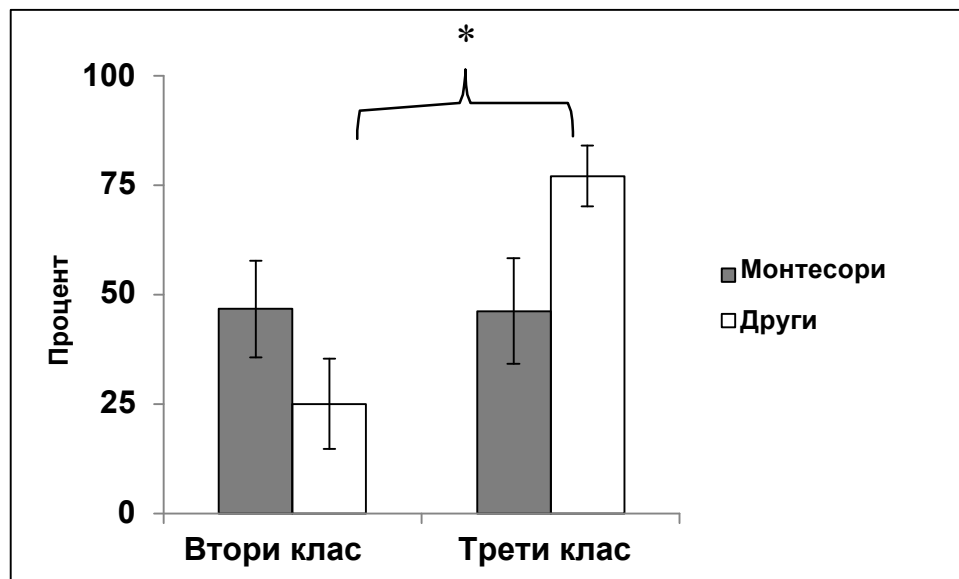
Аритметична стратегия. И накрая, изследвахме различията на ниво клас и на ниво програма в процента аритметични задачи, при които децата са използвали броене, декомпозиция, писмен алгоритъм, или друга стратегия. Анализите MANOVA 2 (клас: втори срещу трети) \times 2 (тип програма: Монтесори срещу друга) установиха мултивариантен ефект за клас, $F(4, 46) = 5.68, p = .001, \eta_p^2 = .33$ и тенденция за взаимодействие между клас и програма, $F(3, 46) = 2.50, p = .06, \eta_p^2 = .18$.

За да разберем по-добре многовариантния ефект, ние изследвахме резултата от еднопроцесните анализи и открихме главен ефект за клас в честотата, с която децата са използвали стратегия за броене, $F(1, 49) = 10.37, p = .002, \eta_p^2 = .18$. Децата са използвали броене в 14% ($SD = 20$) от задачите във втори клас и 2% ($SD = 6$) от задачите в трети клас. Установихме взаимодействие между клас и програма при употребата на стратегия с писмен алгоритъм. Децата от училищата „Монтесори“ са използвали писмен алгоритъм при около 46% от задачите както във втори, така и в трети клас. Но процентът на децата в другите училища се е увеличил при използването на писмен алгоритъм - в 25% ($SD = 29$) от задачите във втори клас на 77% ($SD = 28$) от задачите в трети клас. Фигура 3 представя процента на задачите, при които децата са избрали да използват стратегия с писмен алгоритъм по тип програма и клас. Когато погледнем процента на задачите, при които децата са кодирани като използващи други стратегии, откриваме както главен ефект за клас, $F(1, 49) = 10.14, p = .003, \eta_p^2 = .17$, така и взаимодействие между клас и програма, $F(1, 49) = 4.2, p = .046, \eta_p^2 = .08$. Като цяло, децата са използвали други стратегии в 6% ($SD = 14$) от задачите във втори клас и в 0.7% ($SD = 4$) от задачите в трети клас. Употребата на други стратегии в програми, различни от Монтесори е намалял с 10%, докато употребата на други стратегии от децата в програми Монтесори е намалял с по-малко от 3%.

Изследователски въпрос 3

За да проверим дали разликите в резултатите на по-ранен етап може да са свързани с тези на по-късен етап, ние проведохме серия от взаимосвързани анализи, сравнявайки резултатите на децата при оценяването по време на T1 и техните резултати при оценяването по време на T2. По-специално, ние се интересувахме дали познанията за основа 10 в детската градина и първи клас предполагат определени аритметични резултати във втори и трети клас, както и дали тази връзка се променя в зависимост от типа програма. При тези анализи ние включихме само подгрупата на децата, които са участвали в изследванията по време на двата периода T1 и T2.

Група 1. Както е показано в Таблица 2, за група 1 ние открихме, че процентът на опитите, в които децата от детската градина са използвали канонични изображения на основа 10 за числата е положително свързано с точността на аритметичните задачи във втори клас сред децата от програми, различни от Монтесори и за точността на аритметичните задачи и задачите за определяне на стойността на числата в зависимост от позицията им във втори клас сред децата в програми Монтесори. В допълнение, точността при задачите със събиране в детска градина е положително свързано с точността на аритметичните задачи във втори клас сред децата в програми, различни от Монтесори. Въпреки това, точността на задачите със събиране по време на T1 няма никаква взаимовръзка с каквито и да е мерки, използвани по време на T2 сред децата от програмите Монтесори. И накрая, процентът на опитите, в които децата са използвали стратегия за декомпозиция в детската градина няма взаимовръзка с точността на който и да е тип аритметични задачи във втори клас сред децата от програми Монтесори или други програми.



Фигура 3. Процент задачи, при които децата са използвали стратегия с писмен алгоритъм по време на T2.

Група 2. Проведохме идентични корелационни анализи за деца от група 2. Както е показано на Таблица 2, както процентът на опитите, в които първокласниците са използвали канонично изображение на основа 10 на числата, така и точността на аритметичното оценяване по време на T1 имат взаимовръзка с точността на определяне на стойността на числата в зависимост от позицията им сред третокласниците в програми, различни от Монтесори. Но каноничното изображение на основа 10 на числата и аритметичната точност по време на T1 не са взаимосвързани с никакви мерки, използвани по време на T2 сред третокласниците от програми Монтесори. Процентът на опитите, в които първокласниците са използвали стратегия за декомпозиция не е взаимосвързан с никакви мерки, използвани от третокласниците в програми, различни от Монтесори, но е взаимосвързан с точността на аритметичните задачи и задачите за определяне на стойността на числата в зависимост от позицията им сред третокласниците от програми Монтесори.

Таблица 2

Коефициенти на корелация (Pearson's r) между процентите на точност при оценяване по време на Период 1 (T1) и Период 2 (T2)

Деца от детската градина и от втори клас от програми, различни от Монтесори

	1	2	3	4	5
1. Канонично изображение на основа 10 по време на T1	-				
2. T1 Аритметика	0.924**	-			
3. T1 Декомпозиция	0.592	0.478	-		
4. T2 Аритметика	0.948**	0.799*	0.403	-	
5. T2 Стойност на числата	0.552	0.522	0.622	0.713*	-
6. T2 Декомпозиция	0.587	0.473	0.408	0.455	-0.032

Деца от детската градина и от втори клас от програми Монтесори

	1	2	3	4	5
1. Канонично изображение на основа 10 по време на T1					
2. T1 Аритметика	0.458	-			
3. T1 Декомпозиция	0.352	0.451	-		
4. T2 Аритметика	0.600*	0.426	0.506	-	
5. T2 Стойност на числата	0.725**	0.394	0.491	0.834**	-
6. T2 Декомпозиция	0.317	0.195	-0.073	0.194	0.29

Първокласници и третокласници от програми, различни от Монтесори

	1	2	3	4	5
1. Канонично изображение на основа 10 по време на T1	-				
2. T1 Аритметика	0.458	-			
3. T1 Декомпозиция	0.419	0.686**	-		
4. T2 Аритметика	0.224	0.317	0.112	-	
5. T2 Стойност на числата	0.560*	0.505*	0.406	0.491*	-
6. T2 Декомпозиция	0.286	0.34	0.444	0.121	0.416

Първокласници и третокласници от програми Монтесори

	1	2	3	4	5
1. Канонично изображение на основа 10 по време на T1	-				
2. T1 Аритметика	0.204	-			
3. T1 Декомпозиция	-0.041	0.732**	-		
4. T2 Аритметика	0.220	0.409	0.577*	-	
5. T2 Стойност на числата	0.03	0.302	0.664*	0.718*	-
6. T2 Декомпозиция	0.253	0.284	0.316	-0.417	-0.005

Забележка: T1 представя задачите от Период 1; T2 представя задачите от Период 2. T1 и T2 декомпозиция се отнася за процента на опитите, в които децата са използвали стратегия за декомпозиция, независимо от това дали са дали верен отговор на задачата или не.

* $p < .05$ ниво, двустранно

** $p < .01$ ниво, двустранно

Дискусия

Настоящото изследване тества хипотезата, че подходът Монтесори насърчава по-добро разбиране на основа 10 и аритметиката от други традиционни програми, като се има предвид акцента на тези понятия в материалите и обучението на Монтесори. Като цяло, изследването не откри доказателства в подкрепа на тази хипотеза. От първи клас и до края на трети клас, не бяха установени различия в знанията по математика сред децата от програми Монтесори и тези от други програми. В дискусията, която следва, ние предлагаме възможните обяснения за и последиците от изводите.

Различия на ранен, но не и на по-късен етап в разбирането на основа 10

Резултатите от настоящото изследване показват, че децата в програми Монтесори демонстрират предимство в разбирането на основа 10 в детската градина, в сравнение с връстниците си от по-традиционните училища. Въпреки това, учениците от Монтесори не демонстрират същото предимство в първи, втори и трети клас. Има няколко възможни обяснения за това откритие. Първо, конкретната група деца от детската градина Монтесори, които са участвали в това изследване може да са били особено напреднали. Все пак, това обяснение изглежда малко вероятно, тъй като същите деца са тествани във втори клас и не са показали предимство на този етап. По-правдоподобно обяснение е, че Монтесори може да има особено силна програма за предучилищна възраст или че повечето детски градини Монтесори имат предучилищно обучение, имайки предвид, че детската градина е последната година от тригодишния цикъл, давайки на децата в детската градина предимство над връстниците им от други програми. Въпреки това, до започването на първи клас, връстниците им от другите училища може да имат достатъчно време, за да наваксат.

Моделът на корелации между разбирането на основа 10 по време на T1 и знанията за стойността на числата в зависимост от позицията им по време на T2 подкрепят това обяснение за "наваксването". Оценяването за стойността на числата в зависимост от позицията им, проведено при децата във втори и трети клас, е проектирано като тест, подходящ за възрастта на децата, аналогичен на оценяването за основа 10, което се използва в детската градина и първи клас. Прогнозирахме, че децата, които използват канонични изображения на основа 10 в детската градина и първи клас ще дадат по-точни отговори на задачите за определяне на стойността на числата в зависимост от позицията им две години по-късно. Открихме, че процентът на каноничните изображения на основа 10 в детска градина е взаимосвързан с резултатите от определяне на стойността на числата, но не и с други умения, сред децата във втори клас от училищата Монтесори; процентът на каноничните изображения на основа 10 в първи клас е положително свързано с точността при определяне на стойността на числата, но не и с други резултати, сред третокласниците от училища, различни от Монтесори. Този различен модел на корелации подкрепя становището, че децата от Монтесори са усвоили тези понятия предимно в детската градина, докато учениците от другите училища са направили това в първи клас. Важно е да се отбележи, че второкласниците от двете училища са показали равностойни резултати в оценяването за точност при определянето на стойността на числата в зависимост от позицията им, което предполага, че времето за придобиване на тези знания има малък или никакъв ефект върху резултатите на по-късен етап.

Друго обяснение, не взаимно изключващо се, би могло да бъде, че подходът Монтесори се фокусира върху по-широк кръг от математически понятия, отколкото типичното обучение извън Монтесори, през този период от време, с други думи, децата получават диференциална практика по основа 10 по различните програми. Необходими са по-нататъшни изследвания с по-голям брой ученици, за да се разбере защо това предимство при учениците от Монтесори съществува в детската градина, но не и в началното училище. Също така би било полезно да се изследват и различията с по-широки мерки за математическите постижения.

Надлъжни модели на аритметична точност и аритметични стратегии

Докато не се наблюдават различия в аритметичната точност между децата от училищата „Монтесори” и тези от други училища и в двата периода T1 и T2, децата от различните програми в действителност проявяват различни траектории на развитие. Аритметичната точност в детската градина изглежда предполага аритметична точност във втори клас за деца от училища, различни от Монтесори, но не и за децата от училищата „Монтесори”. Това откритие предполага, че в по-традиционна училищна среда, учебните практики и програми може да изискват децата да надграждат върху минали знания, когато се учат да решават по-сложни задачи. До средата на началното училище, децата, които не са развили основни аритметични умения, в началото на образованието може да имат затруднения в точното решаване на по-сложните задачи. По същия начин, тези деца, които са особено напреднали в детската градина, може да са в състояние да използват своите знания, придобити на по-ранен етап, за да продължат успешно. Въпреки това, резултатите от настоящото изследване показват, че аритметичните умения на ранен етап не предполагат умения за решаване на по-сложни задачи при децата от програми Монтесори. Преподавателските практики на Монтесори могат да насърчат децата да черпят от набор от умения, различни от аритметични умения, за решаване на по-сложни аритметични задачи в средата на началното училище или могат последователно да проверяват аритметичните умения през тригодишен период, като по този начин правят уменията, усвоени в детската градина по-малко ефективни.

Въпреки, че не проявяват различия в аритметичната точност, децата от програми Монтесори и тези от други програми изпълняват различни стратегии, за да получат отговорите си във втори и трети клас. Употребата на стратегия не се различава по вида на програмата в детската градина и първи клас. Както във втори, така и в трети клас, децата от училищата „Монтесори” показват сравнително равномерно разделение между използването на писмени алгоритми и стратегии на декомпозиция. Но в другите училища, децата преминават от използването на комбинация от писмен алгоритъм, декомпозиция, и броене във втори клас към използване на стратегия за писмен алгоритъм при приблизително три четвърти от задачите в трети клас. Тези резултати предполагат, че учебната програма Монтесори може би набляга на използването на алгоритми за решаване на задачите по-малко отколкото го правят другите училища. Тази разлика може да съществува поради факта, че програмите Монтесори продължават да използват конкретни материали през всичките години на началното образование, повече от програмите в другите училища. Важно е да се отбележи, че не бе установен никакъв недостатък в прехода към писмените алгоритми за децата, учащи в другите училища (различни от Монтесори): тези деца демонстрират точност и знания за определяне стойността на числата в зависимост от позицията им, сравнимо с това на децата от Монтесори. Необходими са по-нататъшни изследвания, за да се разбере дали стратегиите, които децата използват, за да решават аритметични задачи в трети клас предполагат определени математически резултати на по-късен етап в началното училище.

Изводи за образованието Монтесори

В заключение, резултатите от това надлъжно изследване показват, че подходът Монтесори може да предложи едно предимство на по-ранен етап пред другите програми, по отношение на подпомагане на децата в разбирането на важни математически понятия, но това преимущество не се трансформира в дългосрочно предимство. Констатациите повдигат най-малко два въпроса, които следва да се разгледат от педагозите на Монтесори.

На първо място, при прехода на децата към програмите за начално образование, какво може да се направи, за да се запази и да се надгражда над предимството, демонстрирано от децата в детската градина по отношение на познанията на основа 10? Децата от училищата „Монтесори” не са показали подобрене на познанията си на основа 10 между детската градина и първи клас,

въпреки че не са били на най-високо ниво в детската градина. За разлика от тях, децата в програми, различни от Монтесори са показали значително подобрене между детската градина и първи клас. Освен това е важно да се отбележи, че предимството не се появява отново в края на тригодишния цикъл: не е останала разлика в познанията за стойността на числата в зависимост от позицията им между децата от Монтесори и другите деца в трети клас. Нужна е повече информация за това, което се случва, когато децата преминават от детската градина към програмата за начално образование. Възможно е да има ненужно повторение на уроците; алтернативно, преходът към абстрактни изображения може да се случва по-бързо от необходимото.

На второ място, как може обучението да помогне на децата да обобщят и да прехвърлят своите знания от сметалото и единичните блокчета към аритметичните задачи и стратегии? Предишни изследвания са показали, че изобразяването на основа 10 сред децата от детската градина допринася за честотата, с която те се опитват да решават аритметични задачи с декомпозиция на основа 10 (Ласки и сътр., 2014 г.). Въпреки това, в настоящото изследване, декомпозицията по време на T1 и по време на T2 са не корелира с основа 10 или стойността на числата в зависимост от позицията им за никоя група от децата, включени в изследването.

Има все повече доказателства, че децата имат нужда от ясни насоки и указания, за да извлекат понятията от конкретните материали или за да разберат връзките между две понятия (Карбоно, Марли и Селиг, 2013 г.; ДеЛоак, Пералта де Мендоса и Андерсън, 1999 г.; Ласки и Сиглър, 2014 г.). Според рамката на когнитивно изравняване, теоретична рамка за плана на обучение, дори и ако конкретните материали са идеално представени, малко вероятно е да се постигне усвояване, ако процедурите и дидактическите способности не насочват вниманието на децата към съответните характеристики (Ласки и Сиглър, 2014 г.). Затова преподавателите трябва също да помислят и как да се покаже изрично на децата, че техните познания за основа 10 са полезни при използването на декомпозиция за решаване наум на задачи със събиране.

Заклучение

Децата, обучавани по учебните програми Монтесори или с по-традиционни програми по всяка вероятност получат много по-различно обучение при изучаването на основни математически понятия. Настоящото изследване показва сходни нива на точност в аритметиката и определяне стойността на числата в зависимост от позицията им при учениците от Монтесори и тези от другите училища. Тези резултати показват, че има много различни и ефективни начини да се подходи към ранното обучение по математика. Евентуални бъдещи изследвания, обхващащи по-дълъг период от време и по-сложни понятия, биха могли да хвърлят по-голяма светлина върху това дали има траен ефект от различните образователни подходи.

ИНФОРМАЦИЯ ЗА АВТОРИТЕ

†Автор за кореспонденция

Елида В. Ласки† е доцент в училище „Линч“ към Колежа в Бостън, Честнат Хил, Масачузетс и можете да се свържете с нея на laski@bc.edu.

Марина Василева е доцент в училище „Линч“ към Колежа в Бостън, Честнат Хил, Масачузетс.

Джоана Шифман е втора година докторант по приложна психология на развитието и обучението в Колежа в Бостън, Честнат Хил, Масачузетс.

Библиография

- Ашкрафт, М. Х., и Стазик, Е. Х. (1981 г.). Събиране наум: тест за три модела за проверка. *Памет и познание*, 9(2), 185–196. doi:10.3758/BF03202334
- Аунола, К., Лескинен, Е., Лерканен, М.-К., & Нурми, Дж.-Е. (2004 г.). Динамика в развитието при резултатите по математика от предучилище до училище 2. *Списание за психология на обучението*, 96(4), 699–713.

- Карбоно, К. Дж., Марли, С. К., & Селиг, Дж. П. (2013 г.). Мета-анализ на ефективността на обучението по математика с конкретни предмети. *Списание за психология на обучението*, 105(2), 380–400
- Карпентър, Т. П., Франки, М. Л., Джейкъбс, В. Р., Фенема, Е., и Емпсън, С. Б. (1998 г.). Надлъжно изследване на изобретателността и разбирането от децата на събиране и изваждане с многоцифрени числа. *Списание за научни изследвания в обучението по математика*, 29(1), 3–20.
- Кар, М., и Алексеев, Н. (2011 г.). Владее, точност, и траектории на развитие на аритметичните стратегии според пола. *Списание за психология на обучението*, 103(3), 617–631. doi:10.1037/a0023864
- Кар, М., Щайнер, Х. Х., Кайзер, Б., и Бидълком, Б. (2008 г.). Сравнение на предсказателите на ранно възникващите разлики между половете по отношение на компетентността по математика. *Различия в ученето и индивидуални различия*, 18(1), 61–75.
- Коули, К. М. (1988 г.). Изграждане на логически познания: Изследване на заемането при изваждане. *Списание за психология на обучението*, 80(2), 202–205.
- Коб, П., и Уетли, Г. (1988 г.). Първоначалните разбираня на децата за десетиците. *Фокус върху проблемите в ученето по математика*, 10(3), 1–28.
- Коуан, Р., Донлан, К., Шепърд, Д.-Л., Коул-Флечър, Р., Сакстън, М., и Хъри, Дж. (2011 г.). Основни познания по изчисление и постижения в математиката при децата в началното училище. *Списание за психология на обучението*, 103(4), 786–803. doi:10.1037/a0024556
- ДеЛоаче, Дж. С., Пералта де Мендоса, О. А., & Мендоса, К. Н. (1999 г.). Множество фактори в употребата на символи в ранна възраст: Инструкции, сходство, и възраст в разбиране на връзката символ-предмет. *Когнитивно развитие*, 14(2), 299–312.
- Дънкан, Г. Дж., Даусет, К. Дж., Клесънс, А., Магнусон, К., Хюстън, А. К., Клебанов, П., ... Джапъл, К. (2007 г.). Готовност за училище и постижения на по-късен етап. *Психология на развитието*, 43(6), 1428–1446. doi:10.1037/0012-1649.43.6.1428
- Фенема, Е., Карпентър, Т. П., Джейкъбс, В. Р., Франки, М. Л., и Леви, Л. (1998 г.). Надлъжно изследване на половите различия в математическото мислене при малките деца. *Образователен изследовател*, 27(5), 6–11. doi: 10.3102/0013189X027005006
- Фюзон, К. (1986 г.). Роли на изображението и вербализацията в обучението по събиране и изваждане с многоцифрени числа. *Европейско списание за психология на обучението*, 1(2), 35–56.
- Фюзон, К. К. (1988 г.). *Брое и понятия за числата при децата*. Ню Йорк, Ню Йорк: Спрингър-Верлаг.
- Фюзон, К. К. (1990 г.). Концептуални структури за мулти-единични номера: Последници за ученето и преподаването на събиране, изваждане, и стойност на числата в зависимост от позицията им с многоцифрени числа. *Познание и обучение*, 7(4), 343–403.
- Фюзон, К. К., и Браярс, Д. Дж. (1990 г.). Използване на блокове за основа десет в ученето / преподаването на стойността на числата в зависимост от позицията им и събиране и изваждане с многоцифрени числа при децата от първи и втори клас. *Списание за научни изследвания в обучението по математика*, 21(3), 180–206. doi: 10.2307/749373
- Фюзон, К. К., и Ли, Й. (2009 г.). Между-културни въпроси в лингвистичната, визуално-количествената и писмено-цифровата помощ за математическо мислене. *ZDM Обучение по математика*, 41(6), 793–808. doi:10.1007/s11858-009-0183-7
- Фюзон, К. К., Смит, С. Т., и Ло Цицерон, А. М. (1997 г.). Подкрепа на латиноамериканските ученици от първи клас по отношение на десетичните структури в градските класни стаи. *Списание за научни изследвания в обучението по математика*, 28(6), 738–766.
- Гиъри, Д. К., Боу-Томас, К. К., Лиу, Ф., и Сиглър, Р. С. (1996 г.). Развиване на аритметични умения при китайските и американските деца: Влияние на възрастта, езика и образованието. *Развитие на детето*, 67(5), 2022–2044.
- Гиъри, Д. К., Фен, Л., и Боу-Томас, К. К. (1992 г.). Познаване на числата: Локуси на разликите в способностите при сравнение на деца от Китай и Съединените щати. *Психологическа наука*, 3(3), 180–185.

- Гиъри, Д. К., Хорд, М. К., Бърд-Крейвън, Дж., и ДеСото, М. К. (2004 г.). Избор на стратегия при просто и сложно събиране: Принос на работната памет и уменията за броене при деца с математически увреждания. *Списание за експериментална детска психология*, 88(2), 121–151. doi:10.1016/j.jesp.2004.03.002
- Гинсбърг, Х. П. (1989 г.). *Аритметика при децата* (второ изд.) Остин, TX: Pro-Ed.
- Гонзалес, П., Уилямс, Т., Джоселин, Л., Роуи, С., Кастбърг, Д., Бренуолд, S. (2009). *Акценти от TIMSS 2007 г.: Математически и научни постижения на американските четвъртокласници и осмодокласници в международен контекст*. Вашингтон, DC: Национален център за статистика в обучението, Институт по образователни науки, Департамент по образованието на САЩ.
- Хиберт, Дж., и Уиърни, Д. (1992 г.). Връзки между преподаването и ученето с разбиране на стойността на числата в зависимост от позицията им в първи клас. *Списание за научни изследвания в обучението по математика*, 23(2), 98–122.
- Джордан, Н. К., Каплан, Д., Ола, Л. Н., и Локуниак, М. Н. (2006 г.). Нарастване на усещането за числата в детската градина: Надлъжно изследване на деца в риск за затруднения в математиката. *Развитие на детето*, 77(1), 153–175.
- Джордан, Н. К., Каплан, Д., Раминени, К., Локуниак, М. Н. (2009г.). Математически въпроси в ранна възраст: Знания за числата в детската градина и резултати на по-късен етап. *Психология на развитието*, 45(3), 850–867. doi:10.1037/a0014939
- Камий, К. (1986 г.). Стойност на числата в зависимост от позицията им: Обяснение на нейната трудност и образователни последици за децата в началните класове. *Списание за научни изследвания в детското образование*, 1(2), 75–86.
- Килпатрик, Дж. (2001 г.). *Събиране: Как да помогнем на децата да научат математика*. Вашингтон, DC: Издание на Националната академия.
- Ласки, Е. В., Ермакова, А., и Василева, М. (2014 г.). Ранно прилагане на декомпозиция при събирането и връзката ѝ със познанията за основа 10. *Списание за приложна психология на развитието*, 35(5), 444–454. doi:10.1016/j.appdev.2014.07.002
- Ласки, Е. В., Джордан, Дж. Р., Дауст, К., Мъри, А. К. (2015 г.). Кое прави използването на предмети в математиката ефективно? Уроци от когнитивната наука и обучението по Монтесори. *SAGE Open*, 5(2), 1–8. doi:10.1177/2158244015589588
- Ласки, Е. В., и Сиглър, Р. С. (2014 г.). Учене от игри с дъски с числа: Научавате това, което кодирате. *Психология на развитието*, 50(3), 853–864.
- Лилард, А. С. (2005). *Монтесору: Науката зад гения*. Ню Йорк, Ню Йорк: Издание на Университета Оксфорд.
- Миура, И. Т., и Окамото, Й. (1989 г.). Сравнение на когнитивното изображение на числата и разбирането на стойността на числата в зависимост от позицията им при първокласниците от САЩ и Япония. *Списание за психология на обучението*, 81(1), 109–114. doi: 10.1037/0022-0663.81.1.109
- Миура, И., Окамото, Й., Ким, К. К., Стиър, М., Файол, М. (1993 г.). Когнитивното изображение на числата и разбирането на стойността на числата в зависимост от позицията им при първокласниците: Сравнения между различните държави: Франция, Япония, Корея, Швеция, и Съединените американски щати. *Списание за психология на обучението*(1), 25–30. <http://dx.doi.org/10.1037/0022-0663.85.1.24>
- Микс, К. С., Пратер, Р. У., Смит, Л. Б. и Стоктън, Дж. Д. (2014 г.) Интерпретация на имената на многоцифрените числа при малките деца: От първите умения до пълното овладяване. *Развитие на детето*, 85(3), 1306–1319. doi: 10.1111/cdev.12197
- Монтесори, М., Симъндс, Ф. (1917 г.). *Напредналият метод Монтесори: Спонтанна дейност в образованието*. Лондон, Англия: У. Хайнеман.
- Национален център за образователна статистика (2013 г.). *Доклад за нацията: Първи поглед: 2013 г. Математика и четене* (NCES 2014-451). Институт за образователни науки, Департамент по образованието на САЩ, Вашингтон, D.C.
- Национален консултативен панел по математика. (2008 г.). *Основи за успех: Последният доклад на Националния консултативен панел по математика*. Вашингтон, DC: Департамент по

- образованието на САЩ. Взето от
<http://www2.ed.gov/about/bdscomm/list/mathpanel/report/final-report.pdf>
- Пери, М. (2000 г.). Обяснение на математическите понятия в класните стаи в първи и пети клас в Япония, Китай и САЩ. *Познание и обучение*, 18(2), 181–207.
- Резник, Л. Б., Омансон, С. Ф. (1987 г.). Да се научим да разбираме аритметиката. В Glaser, R. (ред.), (1987 г.). *Напредък в психологията на обучението*, Том 3 (стр. 41–95). Хилсдейл, NJ: Erlbaum.
- Рос, Б. Х. (1989 г.). Отличителни видове повърхностни прилики: Различни ефекти върху достъпа и използването на по-ранни проблеми. *Списание за експериментална психология: Учение, памет и познание*, 15(3), 456–468. <http://dx.doi.org/10.1037/0278-7393.15.3.456>
- Сакстън, М., Тауси, Дж. Н. (1998 г.). Лингвистична реалност: Случаят на стойността на числата в зависимост от позицията им при многоцифрените числа. *Списание за експериментална детска психология*, 69(1), 66–79.
- Шрагер, Дж., и Сиглър, Р. С. (1998 г.). SCADS: Модел на стратегическия избор и стратегическите открития при децата. *Психологическа наука*, 9(5), 405–410.
- Сиглър, Р. С., и Рамани, Г. Б. (2009 г.). Играта с линейни дъски—но не кръгли—подобрява разбирането на числата при децата от предучилищна възраст. *Списание за психология на обучението*. 101(3), 545–560. doi:10.1037/a0014239
- Стивънсън, Х. У., и Нюман, Р. С. (1986 г.). Дългосрочна прогноза за постижение и отношение към математиката и четенето. *Развитие на детето*, 57(3), 646–659.
- Торбейнс, Дж., Вершафел, Л., и Гескю, П. (2004 г.). Стратегически аспекти на простото събиране и изваждане: Влиянието на математическите умения. *Учение и обучение*, 14(2), 177–195.
- Утал, Д. Х., О’Дохърти, К., Нюланд, Р., Хенд, Л. Л. И ДеЛоаче, Дж. (2009 г.). Двойно изображение и свързване на конкретни и символични изображения. *Перспективи на детското развитие*, 3(3): 156–159. doi: 10.1111/j.1750-8606.2009.00097.x
- Валерас, М., и Бекер, Дж. (1997 г.). Овладеяване на стойността на числата в зависимост от позицията им при децата: Семиотични аспекти. *Познание и обучение*, 15(2), 265–286.
- Василева, М., Ласки, Е. В., Ермакова, А., Лай, У.-Ф., Дженг, Й., и Хачиган, А. (2015 г.). Преосмисляне на езиковите различия в различните държави при обяснението на изображенията на основа 10. *Списание за експериментална детска психология*, 129, 12–25.